

Logika tříd

V kapitole „Predikátová logika“ jsme uvedli, že jednomístné predikáty vyjadřují nějakou vlastnost.

- a) „Karel je studentem.“ (má vlastnost „být studentem“)
- b) „Číslo 9 je dělitelné 3.“ (má vlastnost „být dělitelné 3“)
- c) „Pan Novák bydlí ve Smetanově ulici.“

Ve všech případech nějaké konkrétní individuum (logický prvek) zařazujeme do třídy (množiny, souboru) dalších prvků majících tutéž vlastnost.

Jde tedy o

- a) třídu prvků, jejichž společnou vlastností je „být studentem“,
- b) množinu čísel, jimž je společná vlastnost „být dělitelný třemi“
- c) soubor občanů, jimž je společné to, že všichni bydlí ve Smetanově ulici.

Máme zde co činit s individui a třídami (množinami, soubory).

Logika tříd je takovou součástí moderní (symbolické) logiky, která se zabývá odlišováním logických individuí a tříd, organizací tříd, typy tříd, vztahy mezi třídami a operacemi s třídami.

Základní pojmy logiky tříd

Logické individuum je takový objekt myšlení, který je v dané souvislosti od jiných objektů odlišitelný a v téže souvislosti není dále rozkládán.

Logická třída je soubor logických individuí, majících v určité dané souvislosti společnou vlastnost nebo skupinu společných vlastností.

Oblast zkoumání je určena rámcem určitého oboru, v němž musíme rozhodnout, co budeme považovat za logické individuum a co za třídu. Je nutno si uvědomit, že prvky uvažované třídy jsou v určité oblasti zkoumání dále nerozkladné, ale v jiných souvislostech mohou vystupovat jako samostatné třídy.

Tím vznikne hierarchie tříd.

Hierarchie tříd

Třída 1. řádu obsahuje jako své prvky logická individua.

Třída 2. řádu obsahuje jako své prvky třídy 1. řádu.

Třída 3. řádu obsahuje jako své prvky třídy 2. řádu.

.
. .
.

Třída n . řádu obsahuje jako své prvky třídy $(n - 1)$. řádu.

Třídy nižšího řádu mívají též název podtřídy (podmnožiny).

Hierarchické uspořádání je mimořádně důležité, protože jeho nerespektování vede k logickým chybám. Z hierarchického uspořádání vyplývají dvě zásady, které je nutno dodržovat.

1. Individuum a třída, resp. třída $(n - 1)$. řádu a třída n . řádu jsou odlišného řádu a nesmí být ztotožněny.

Příklad. „Věta je nepravdivá“.

Tento logický paradox (antinomie, protimluv) vzniká porušením první zásady.

Pokusíme-li se o odpověď na otázku „jaká je uvedená věta? Pravdivá nebo nepravdivá?“

a) Pravdivá: Je pravdou, co o sobě tvrdí, tedy že je nepravdivá.

b) Nepravdivá: Pravdou je tedy opak, tedy že je pravdivá [viz a)]

Je nutno si uvědomit, že máme co činit s množinou např. 1. řádu, která je definována jako množina všech vět uvedených v této učebnici.

Jedním z několika tisíc logických individuí je věta, která zní: „Věta je nepravdivá.“.

Zápis musí mít stejnou formu jako jiné záznamy, mající stejnou formální strukturu:

S	je	P
subjekt	je	predikát
Novák	je	student
„Věta je nepravdivá“	je	věta.

„Věta je nepravdivá.“ je logický prvek příslušející do třídy (množiny, souboru) vět.

q

2. Třída nemůže být prvkem sebe sama, protože každý její prvek musí být právě o jeden stupeň nižšího řádu.

Máme-li třídu 4. řádu, smějí být jejími prvky jediné třídy 3. řádu; nikdy ne 4. řádu (byla by prvkem sebe sama), ale ani např. 2. řádu. Třídy lze definovat

a) *rozsahově – extenzionálně*, tzn. že všechny prvky vyjmenujeme.

Příklad. Seznam studentů 1. ročníku PEF lze pokládat za extenzionální popis množiny.

b) *obsahově – intenzionálně*, tzn. vytčením vlastnosti, která přísluší pouze prvkům dané třídy a žádným jiným.

Příklad.

Množina lidí majících státní příslušnost ČR.

Množina čísel, dělitelných třemi a čtyřmi.

Množiny nekonečné nebo konečné, jejichž počet prvků je nemožné stanovit, je možno definovat pouze intenzionálně. ^q

Příklad. Množina občanů ČR trpících alergií.

Základní druhy tříd (množin)

- | | |
|----------------|--|
| 1) Neprázdná | obsahuje <i>alespoň jeden</i> prvek |
| 2) Prázdná | neobsahuje <i>žádný</i> prvek |
| 3) Univerzální | obsahuje <i>všechny</i> prvky oblasti zkoumání |

Prázdná a univerzální třída jsou mimořádně významné a v dalším výkladu se k nim vrátíme.

Vztahy mezi třídami (množinami)

(Některé vztahy a operace s třídami budeme pro názornost graficky znázorňovat tzv. Vennovými, resp. Eulerovými diagramy. Body znázorňují logická individua, kružnice třídy a čtverec univerzum, které zahrnuje všechny prvky dané oblasti zkoumání).

V kalkulu tříd (množin) budeme užívat symboly x, y, z pro proměnné individuí, symboly A, B, C pro třídy (soubory, množiny) a kvantifikátory a funktory výrokového kalkulu. Některé nové termíny zavedeme ve výkladu definicí.

Vztah členství ve třídě

$$x \in A$$

Formuli je samozřejmě možno negovat: $\overline{x \in A}$

(x je prvkem množiny A , x patří do třídy A , x je součástí souboru A apod.).

Vztah inkluze (podřazenosti) (obr. 1)

$$A \supset B \approx (\exists x) [x \in A \supset x \in B]$$

(třída A je ve vztahu inkluze k třídě B , třída A je obsažena v třídě B , soubor A je částí souboru B). Třída A se má ku třídě B právě tak, jako se má logické individuum x ku třídě A ve vztahu členství ve třídě. Tak můžeme vyjádřit hierarchii tříd užitím zákona hypotetického syllogismu – viz Z 32.

$$[(x \in A) \supset (A \supset B)] \supset (x \in B)$$

Vztah rovnosti

$$A = B \approx (\exists x) [x \in A \approx x \in B]$$

Vztah rovnosti můžeme také odvodit

$$A = B \approx (A \supset B) \supset (B \supset A)$$

$$A = B \approx (\exists x) \{ [x \in A \supset x \in B] \supset [x \in B \supset x \in A] \}$$

$$A = B \approx (\exists x) \{ \overline{[x \in A \supset x \in B]} \supset \overline{[x \in B \supset x \in A]} \}$$

$$A = B \approx (\exists x) \{ (\overline{x \in A})(x \in B) \supset (\overline{x \in B})(x \in A) \supset (x \in B)(\overline{x \in B}) \supset (x \in B)(x \in A) \}$$

$$A = B \approx (\exists x) \{ (\overline{x \in A})(x \in B) \supset 0 \supset 0 \supset (x \in A)(x \in B) \}$$

$$A = B \approx (\exists x) \{ (x \in A)(x \in B) \supset \overline{(x \in A)(x \in B)} \}$$
 viz Z 40 a

substitucí

$$p|x \in A, q|x \in B$$

Vztah nerovnosti

$$A \not\supset B \approx \overline{(\exists x) [x \in A \approx x \in B]} \approx (\exists x) [x \in A \not\approx x \in B]$$

$$A \not\supset B \approx \overline{A = B}$$

Poloha tříd

a) Protínání tříd (obr. 2)

Existuje alespoň jeden prvek společný oběma třídám A , B , dále existuje alespoň jeden prvek náležející pouze třídě A a konečně alespoň jeden prvek náležející třídě B

$$(A \text{ protíná } B) \equiv \exists x [(x \in A) \wedge (x \in B)] \wedge \exists y [(y \in A) \wedge \neg(y \in B)] \wedge \exists z [\neg(z \in A) \wedge (z \in B)],$$

b) Disjunktnost tříd (obr. 3)

Neexistuje žádný prvek, který by patřil současně do nějaké třídy A a do třídy B .

$$A \text{ disj. } B \equiv \neg \exists x [(x \in A) \wedge (x \in B)] \equiv \neg \exists x [(x \in A) \wedge (x \in B)]$$

úpravou na opačný kvantifikátor Z 65, případně dle TE (Z 63),

$$A \text{ disj. } B \equiv \forall x [\neg(x \in A) \vee \neg(x \in B)] \equiv \forall x [(x \in A) \supset \neg(x \in B)].$$

Všechny existující vztahy mezi třídami A a B můžeme vyjádřit disjunktivním složeným výrokem

$$(A = B) \vee (A \cap B) \vee (A \text{ protíná } B) \vee (A \text{ disj. } B).$$

Jde pochopitelně o tautologii, protože jeden z uvedených vztahů musí platit, což je u disjunkce dostačující podmínka pro pravdivost celého výroku. Tato skutečnost vystoupí zvlášť jasně tenkrát, uvědomíme-li si, že vztahy

$(A \cap B)$, $(B \cap A)$, $(A \text{ protíná } B)$, $(A \text{ disj. } B)$ jsou souhrnně vyjádřitelné jako

$$A \cap B.$$

Náš souhrnný výrok pak dostává podobu $(A = B) \vee (A \cap B)$ a protože $(A \cap B) \equiv A = B$, můžeme zapsat

$$(A = B) \vee A = B$$

(což je nám důvěrně známý zákon vyloučeného třetího (viz Z 2).

Některé důležitější zákony charakterizující vztahy mezi třídami

Z 68 $A \supset A$ zákon reflexivity pro inkluzi

Z 69 $0 \supset A$

Z 70 $A \supset A$

Z 71 $[(A \supset B) \wedge (B \supset A)] \Leftrightarrow (A = B)$ zákon totožnosti (identity)

Z 72 $[(A \supset B) \wedge (B \supset C)] \Leftrightarrow (A \supset C)$ zákon tranzitivity pro inkluzi

Z 73 $A \cap B = B \cap A$ zákon komutativnosti pro násobení (průnik)

Z 74 $A + B = B + A$ zákon komutativnosti pro sčítání (sjednocení)

Z 75 $(A = B) = (B = A)$ zákon komutativnosti pro rovnost

Z 76 $(A \not\supset B) = (B \not\supset A)$ zákon komutativnosti pro nerovnost

Operace s třídami

Z daných tříd (množin, souborů) je možno vytvářet třídy nové. Děje se tak logickým sčítáním, násobením, odčítáním či vytvářením doplňků.

Příklad. V demografických statistikách je běžný postup vytvořit ze souboru učitelů základních škol, učitelů odborných škol, učitelů středních škol a učitelů gymnázií soubor vyjadřující relativní četnost učitelů ve sledovaném regionu. Takový soubor je vytvářen logickým součtem čtyř souborů. Logickým násobením tohoto souboru se souborem všech občanů ženského pohlaví získáme relativní četnost učitelek.

Takovým postupům říkáme *logické operace*:

- sjednocení tříd (logické sčítání)
- průnik tříd (logické násobení)
- vytváření doplňku (komplementu)
- odečítání tříd

Sjednocení tříd (viz obr. 4)

Z daných tříd A , B vznikne nová třída S , která obsahuje jako své prvky všechny prvky, které jsou obsaženy alespoň v jedné z daných tříd a žádné jiné. (Jednu z daných tříd připojíme k druhé.)

Exaktně tuto skutečnost vyjádříme

$$S = A + B$$

$$(x \in S) \Leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in B)$$

Příklad. Množina A obsahuje jako své prvky všechna celá kladná čísla v intervalu 0 až 20 dělitelná 3.

$$3, 6, 9, 12, 15, 18$$

Množina B obsahuje jako své prvky všechna celá kladná čísla v intervalu 0 až 20 dělitelná 4.

4, 8, 12, 16, 20

Množina $(A+B)$ obsahuje jako své prvky všechna čísla daného intervalu dělitelná 3 nebo 4 („nebo“ ve smyslu nevylučujícím).

3, 4, 6, 8, 9, 12, 15, 16, 18, 20

q

Povšimněme si souvislosti s definiční tabulkou disjunkce.

Průnik tříd (viz obr. 5)

Z daných tříd A , B vzniká nová třída P , která obsahuje všechny prvky, které jsou oběma třídám společné a žádné jiné.

$$(x \in P) \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B)$$

$$P = A \cap B$$

Příklad. Množina $A \cap B$ obsahuje jako své prvky všechna čísla daného intervalu dělitelná 3 a 4. Podmínce vyhovuje číslo 12. Jde o množinu o jediném prvku.

Povšimněme si souvislosti s definiční tabulkou konjunkce.

Vytváření doplňku (komplementu) (viz obr. 6)

Oblastí zkoumání jsou všechna celá kladná čísla v intervalu 0 až 20.

Množinu $\bar{A}$ tvoří čísla, která nejsou součástí A :

0, 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 19, 20.

Množinu $\bar{B}$ tvoří čísla, která nejsou součástí B :

0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 18, 19.

Množinu $\overline{A+B}$ tvoří čísla

0, 1, 2, 5, 7, 10, 11, 13, 14, 17, 19.

Množinu $\overline{AB}$ tvoří všechna čísla v intervalu 0 až 20 s výjimkou čísla 12.

q

$$A + \overline{A}$$

celá oblast zkoumání (univerzum, konstanta)

$$B + \overline{E}$$

$$A \ominus \overline{A}$$

prázdná množina (konstanta 0).

$$B \ominus \overline{E}$$

(Neexistuje ani jeden společný prvek.)

K dané třídě A lze vytvořit třídu K , která obsahuje jako své prvky všechny prvky oblasti zkoumání, které nejsou prvky množiny A . Pokud pro oblast zkoumání zavedeme název univerzum a značíme ho konstantou 1 pak platí

$$A + K = 1$$

$$A \ominus K = 0$$

Abychom zjednodušili symbolický zápis, budeme místo názvu množiny S užívat $(A+B)$, místo názvu P uijeme $(A \ominus B)$ doplněk budeme nazývat negací dané množiny (v našem případě $\overline{A}$).

Nahradíme-li názvy komplementu K negací dané množiny ($\overline{A}$), získáme důležité rovnosti kalkulu tříd.

$$Z\ 107 \quad A + \overline{A} = 1$$

logický součet jakékoli množiny s jejím doplňkem zahrnuje všechny prvky dané oblasti zkoumání

$$Z\ 106 \quad A \ominus \overline{A} = 0$$

průnik jakékoli množiny s jejím doplňkem neobsahuje ani jeden prvek dané oblasti zkoumání.

Odečítání tříd (rozdíl tříd) (viz obr. 7)

Rozdílem tříd A, B jsou všechny prvky jedné z daných tříd, které nejsou obsaženy v třídě druhé.

$$x \in (A - B) \approx (x \in A) \ominus (x \in B)$$

$$x \text{ } \mathbb{M}(B - A) \approx x \text{ } \mathbb{M}B \ominus \overline{x \text{ } \mathbb{M}A}$$

Nutno upozornit, že operace odečítání tříd není komutativní.

Z obr. č. 7 je patrné, že lze řešit úlohy odečítání jakousi úvahou nebo graficky. Není to ale možné, jde-li o složité množiny. Řešení se nabízí ze zápisu

$$x \text{ } \mathbb{M}(A - B) \approx x \text{ } \mathbb{M}A \ominus \overline{x \text{ } \mathbb{M}B} \quad \text{odvodíme}$$

$$A - B \approx A \ominus \overline{B}, \text{ resp. } A\overline{B}$$

Od množiny A odečteme množinu B tak, že A vynásobíme doplňkem B .

Příklad.

a) Máme množinu $A + B$. Od ní odečteme množinu $(A \ominus B)$.

$$(A + B) - (A \ominus B)$$

Doplňkem množiny $A \ominus B$ je $\overline{A \ominus B}$. Upravíme tedy na

$$(A + B) \ominus (\overline{A \ominus B}) \quad \text{aplikací De Morg. zákona Z 86 získáme}$$

$$(A + B) \ominus (\overline{A} + \overline{B}), \quad \text{dle zák. distributivnosti (Z 84) a dle Z 106}$$

$$A\overline{A} + A\overline{B} + \overline{A}B + B\overline{B} = A\overline{B} + \overline{A}B \quad \text{viz obr. 4}$$

Komentář k obr. 4

A svislé šrafování

B vodorovné šrafování

$A + B$ jakékoliv šrafování

$A \cdot B$ část vyčtverečkováná

$A\overline{B}$ pouze svisle šrafovaná část A

$\overline{A}B$ pouze vodorovně šrafovaná část B

$\overline{A}B + A\overline{B}$ tlustě obtažená část šrafovaná buď svisle anebo vodorovně

Doplňkovou třídu můžeme utvořit ke každé třídě, tedy i k třídě vytvořené nějakou z uvedených operací s třídami.

Jsou-li dány třídy A, B, C , jsou třídami také jejich doplňky $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$.

Třídami jsou např. $(A+B), (A+B) \in \mathcal{C}$, případně doplňky k nim $\overline{A+B} \in \mathcal{C}, \overline{(A+B)} \in \mathcal{C}$ atd.

Příklad. Utvořme doplněk k třídě $A+B$.

Víme, že doplněk k třídě A je $\bar{A}$.

Vztahem členství ve třídě jsme vymezili příslušnost prvků k vzniklé množině $(A+B)$ takto:

$$\text{aa) } x \in (A+B) \Leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in B)$$

O doplňkové třídě víme, že obsahuje všechny prvky, které nejsou prvky třídy $(A+B)$. Tedy

$$\text{ab) } x \in \overline{(A+B)} \Leftrightarrow \overline{(x \in A) \vee (x \in B)}$$

dle De Morgana upravíme predikát na

$$\text{ac) } x \in \overline{(A+B)} \Leftrightarrow \overline{(x \in A)} \wedge \overline{(x \in B)}$$

Dle zákona říkajícího, že $x \in \bar{A} \Leftrightarrow \overline{x \in A}$ (x je prvkem doplňku A tehdy a jen tehdy, jestliže není pravda, že x je prvkem množiny A). Aplikací tohoto zákona.

$$\text{ad) } x \in \overline{(A+B)} \Leftrightarrow (x \in \bar{A}) \wedge (x \in \bar{B})$$

$$\text{ae) } \overline{A+B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

viz obr. 8, 9

Již několikrát jsme upozorňovali na úzkou souvislost konjunkce a disjunkce výrokového kalkulu s logickým průnikem a sjednocením

kalkulu tříd. Na obr. č. 8, 9 je názorně vidět obsah známých De Morganových zákonů.

Každou formuli, v níž se vyskytuje průnik, lze nahradit formulí, v níž se vyskytuje sjednocení a naopak.

Z tohoto zákona můžeme odvodit pravidlo: Doplněk logického součinu je roven logickému součtu doplňků jednotlivých tříd.

Příklad. $\overline{(A + B) \cdot C} = \overline{(A + B)} + \overline{C}$

Zákony duality

$$Z\ 85\ A \cdot \overline{B} = \overline{\overline{A} + B}$$

$$Z\ 86\ \overline{\overline{A} \cdot B} = \overline{\overline{A} + B}$$

$$Z\ 87\ A + B = \overline{\overline{A} \cdot \overline{B}}$$

$$Z\ 88\ \overline{\overline{A} + \overline{B}} = \overline{\overline{A} \cdot \overline{B}}$$

Vztah mezi výrokovým kalkulem, kalkulem predikátů a kalkulem množin lze formulovat takto:

Z každé ekvivalence výrokové logiky, která obsahuje pouze funktory konjunkce, disjunkce, ekvivalence a negace získáme ekvivalence predikátové logiky, resp. rovnosti logiky tříd, substituujeme-li za proměnné výrokové logiky příslušné predikáty resp. symbolické značky logiky tříd, konjunkci nahradíme operátorem násobení ($\cdot$), disjunkci operátorem sčítání (+), ekvivalenci rovností (=). Negaci v kalkulu množin chápeme jako doplňky.

Příklad. Z 40

V predikátovém kalkulu substitucí $p|x \models A$, $q|x \models B$ a užitím obecného kvantifikátoru získáme

$$[(\forall x)(x \models A \cdot x \models B)] \cdot (\exists x) [x \models (A + B)] \cdot (\exists x) [x \models (\overline{A} \cdot \overline{B})]$$

V kalkulu množin

$$A = B \Leftrightarrow (A \cap B) + (\bar{A} \cap \bar{B}), \text{ resp. } AB + \bar{A}\bar{B}.$$

Univerzální a prázdná třída

Univerzální třída (symbolicky "1") obsahuje všechny prvky dané oblasti zkoumání.

Prázdná třída (symbolicky "0") neobsahuje ani jeden prvek dané oblasti zkoumání.

Jde o mimořádně důležité druhy tříd (množin). Přesně je lze vymezit užitím nám již známých doplňků. Platí rovnosti

$$A + \bar{A} = 1 \quad (\text{viz obr. 6})$$

(Logický součet dané třídy s jejím doplňkem vyčerpává všechny prvky oblasti zkoumání.)

$$A \cap \bar{A} = 0 \quad (\text{viz obr. 6})$$

(Logický průnik dané třídy s jejím doplňkem nemůže mít ani jeden společný prvek.)

Univerzální a prázdná třída mají jako kterékoli jiné třídy svůj komplement (doplňek).

Doplňkem univerza (1) je $\bar{1}$.

Doplňkem prázdné třídy (0) je $\bar{0}$.

Platí rovnosti $\bar{1} = 0$ Z 108 $\bar{0} = 1$ Z 109.

Můžeme tedy říci, že

doplňkovou třídou univerza je prázdná třída,
doplňkovou třídou prázdné třídy je univerzum.

Platí:

$$1 + 0 = 1$$

$$1 \ominus 0 = 0$$

Příklady

Třída (soubor) A	muži
Třída (soubor) $\bar{A}$	ne-muži (ženy)
Třída (soubor) B	učitelé
Třída (soubor) $\bar{B}$	neučitelé (jiná povolání)
Třída (soubor) C	věk. skupina 20 – 60 let
Třída (soubor) $\bar{C}$	ostatní, tzn. mladší 20 a starší 60 let.
$A + \bar{A}$	všichni občané bez rozdílu pohlaví
$B + \bar{B}$	všichni občané bez ohledu na povolání
$C + \bar{C}$	všichni občané bez ohledu na věk

Samozřejmě se jedná o stále tytéž občany, jimž jsou přiřazeny různé vlastnosti. Lze to dokonce i vyjádřit

$$(A + \bar{A}) \ominus (B + \bar{B}) \ominus (C + \bar{C}) = 1 \ominus 1 \ominus 1 = 1 \quad (\text{dle Z 107})$$

Z daných tříd lze vytvářet soubory (podtřídy)

AB	učitelé mužského pohlaví
$\bar{A}B$	učitelky
AC	všichni muži 20 – 60 let

$\overline{AC}$	všechny ženy 20 – 60 let
$\overline{BC}$	všichni neučitelé (muži a ženy jiných povolání) mladší 20 a starší 60 let
$\overline{ABC}$	učitelky věkové kategorie 20 – 60 let
$(A + \overline{A})C$	všichni občané (bez ohledu na pohlaví) ve věku 20 – 60 let. Dle Z 81 upravíme na
$= AC + \overline{AC}$	dle Z 93 upravíme na
$= \underline{C}$	což odpovídá skutečnosti, že není nutno uvádět „všichni občané“, protože není podmínka eliminující muže nebo ženy

atd.

Naším úkolem je odečíst logicky od všech žen věkové kategorie 20 – 60 let učitelky 20 – 60 let. Odečítání řešíme dle zákona Z 110.

Všechny ženy	20 – 60 let	– $\overline{AC}$
Učitelky	20 – 60 let	– $\overline{ABC}$

- aa) $\overline{AC} - \overline{ABC} = \overline{AC} \overline{\overline{ABC}}$ dle De Morg. zákona
- ab) $= \overline{AC} \overline{(A + \overline{B} + \overline{C})}$ dle Z 81
- ac) $= \overline{ACA} + \overline{ACB} + \overline{ACC}$ dle Z 106 a 74
- ad) $= \overline{ABC}$

Výsledkem je třída, žen jiných povolání, (neučitelky), 20 – 60 let. K třídám A, B, C připojíme další

D manželský stav (ženatý, vdaná)

$\bar{D}$

ostatní (vdovec – vdova, rozvedený, rozvedená).

Nyní můžeme vytvářet podrobnější seznamy.

Například: $\bar{A}\bar{B}\bar{C}D$, tj. učitelka ($\bar{A}\bar{B}$), věková skupina do 20 a přes 60 let ($\bar{C}$), vdaná (D).

Univerzum (1) obsahuje, jak již víme, všechny prvky našeho oboru proměnnosti. Naším úkolem je odečíst od univerza náš soubor $\bar{A}\bar{B}\bar{C}D$.

ba) $1 - \bar{A}\bar{B}\bar{C}D$

(„Všichni lidé“ minus vdané učitelky ve věkové hranici do 20 a přes 60 let).

bb) $1 - \overline{\bar{A}\bar{B}\bar{C}D}$

dle De Morganových z.

bc) $1 - (A + \bar{B} + C + \bar{D})$

dle Z 102

bd) $A + \bar{B} + C + \bar{D}$

Pokud byl náš postup bezchybný, musí logický součet $\bar{A}\bar{B}\bar{C}D$ a $A + \bar{B} + C + \bar{D}$ vyčerpat celou oblast zkoumání.

be) $\bar{A}\bar{B}\bar{C}D + (A + \bar{B} + C + \bar{D})$

O správnosti našeho předpokladu se snadno přesvědčíme úpravou souboru $(A + \bar{B} + C + \bar{D})$ na průnik De Morganovým zákonem, což se rovná univerzu (1), protože platí Z 107 $A + \bar{A} = 1$

$$\text{bf)} \quad \overline{AB\overline{C}D} + \overline{\overline{AB\overline{C}D}}$$

Důkaz provedme ještě dalším způsobem.

$$\text{ca)} \quad \overline{AB\overline{C}D} + (A + \overline{B} + C + \overline{D}) \quad \text{dle Z 74 a 78}$$

$$\text{cb)} \quad (A + \overline{AB\overline{C}D}) + \overline{B} + C + \overline{D} \quad \text{dle Z 99}$$

$$\text{cd)} \quad A + \overline{B\overline{C}D} + \overline{B} + C + \overline{D} \quad \text{dle Z 74 a 78}$$

$$\text{ce)} \quad (\overline{B} + \overline{B\overline{C}D}) + A + C + \overline{D} \quad \text{dle Z 99}$$

$$\text{cf)} \quad \overline{B} + \overline{C}D + A + C + \overline{D} \quad \text{dle Z 74 a 78}$$

$$\text{cg)} \quad (C + \overline{C}D) + A + \overline{B} + \overline{D} \quad \text{dle Z 99}$$

$$\text{ch)} \quad C + D + A + \overline{B} + \overline{D} \quad \text{dle Z 74 a 78}$$

$$\text{ci)} \quad A + \overline{B} + C + (D + \overline{D}) \quad \text{dle Z 107 a 78}$$

$$\text{cj)} \quad (A + \overline{B} + C) + 1 \quad \text{dle Z 103}$$

$$\text{ck)} \quad 1$$

V dalším příkladu si zjistíme složení souboru, který vytvoříme průnikem třídy mužů 20 až 60 let (AC) se součtem množin mužů – učitelů (AB) se všemi neženatými do 20 a přes 60 let ($\overline{C}D$).

$$\text{da)} \quad AC(\overline{AB} + \overline{C}D) \quad \text{dle Z 81}$$

$$\text{db)} \quad ACAB + AC\overline{C}D \quad \text{dle Z 95, Z 73}$$

$$\text{dc)} \quad ABC + AC\overline{C}D \quad \text{dle Z 106, Z 104}$$

$$\text{dd)} \quad ABC + 0 \quad \text{dle Z 105}$$

$$\text{de)} \quad ABC$$

Výsledkem tohoto průniku je třída učitelů (mužů) kategorie 20 až 60 let.

Poslední úlohou je zjištění třídy, kterou utvoříme logickým součtem

- třídy mužů, učitelů, mladších 20 a starších 60 let,
- třídy žen, učitelek, mladších 20 a starších 60 let,
- třídy žen, neučitelek, mladších 20 a starších 60 let.

- | | | |
|-----|---|---|
| ea) | $AB\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ | za součet pokládáme
nejjednodušší, ovšem
ekvivalentní formuli.
Upravíme podle Z 96 |
| eb) | $AB\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ | zjednodušíme podle
Z 93 |
| ec) | $B\bar{C} + \bar{A}\bar{C}$ | dále podle Z 81 a Z 74 |
| ed) | $\bar{C}(\bar{A} + B)$ | což je hledaná třída. |

Na uvedených příkladech je zřejmé, že i pro soubory vytvářené z pouhých 3 množin není jednoduché řešit vztahy mezi nimi bez pomoci kalkulu, i když je to možné. Při vyšším počtu souborů je to téměř nemožné. Uvědomíme-li si, že naprostá většina úloh řešených na osobních počítačích není ničím jiným, než hromadným zpracováním dat (práce se soubory), vynoří se důležitost logiky tříd v dalším aspektu.

Rozklad univerza daných tříd

Třidu „1“ nazýváme univerzální třídou neboli univerzem.

Univerzum vyčerpává beze zbytku danou oblast zkoumání.

Každé univerzum lze rozkládat na navzájem disjunktní podtřídy (podmnožiny). Jejich logický součet je samozřejmě 1.

- A) Nejjednodušším základním úplným rozkladem univerza je rozklad na třídu (množinu) a její doplněk: $A + \bar{A} = 1$.
Říkáme, že je to univerzum rozložené na dvě třídy (třída A a její doplněk $\bar{A}$).
- B) Dle z. expanze pro průnik (Z 93) víme, že A můžeme rozšířit na tvar $AB + A\bar{B}$, a $\bar{A}$ analogicky substitucí $\bar{A}$ za A na $\bar{A}B + \bar{A}\bar{B}$. Dostáváme rovnost

$$AB + A\bar{B} + \bar{A}B + \bar{A}\bar{B} = 1$$

Takto utvořeným množinám ($AB, A\bar{B}, \bar{A}B, \bar{A}\bar{B}$) říkáme *sčítance*.

Univerzum jsme tedy rozložili na 4 sčítance, jejichž logický součet je 1.

- C) Zákon 93 můžeme však užít pro rozšíření každého sčítance o další třídu (C).

$$\overbrace{ABC + ABC} + \overbrace{A\bar{B}C + A\bar{B}\bar{C}} + \overbrace{\bar{A}BC + \bar{A}\bar{B}C} + \overbrace{\bar{A}\bar{B}C + \bar{A}\bar{B}\bar{C}} = 1(A, B, C)$$

$$\begin{array}{ccccccc} AB & + & A\bar{B} & + & \bar{A}B & + & \bar{A}\bar{B} \\ = 1(A, B) \end{array}$$

Jde opět o univerzum rozložené tentokrát na osm sčítanců. Můžeme shrnout:

1. Univerzum je možno rozložit na jednotlivé sčítance. Počet sčítanců je dán rovností

$$S = 2^n$$

kde S je počet sčítanců a n počet daných tříd.

2. Třídy A , B a C slouží pouze k pojmenování sčítanců rozkladu; samy o sobě však sčítanci rozkladu nejsou.
3. Každý sčítanec je logický průnik (součin) daných tříd nebo jejich doplňků.
4. Logický součet všech sčítanců je 1.
5. Žádné dva sčítance nemají shodný tvar.
6. Kterýkoliv ze sčítanců s kterýmkoli jiným sčítancem je disjunktní.

Vlastnosti sčítanců a jejich logického součtu jsou patrné z obrázku č. 10.

Pokud bychom měli za úkol provést rozklad univerza pro třídy A , B ,

$$ABCDE + ABCD\bar{E} + ABC\bar{D}E + \star + \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}E + \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}\bar{E} = 1(A, B, C, D, E)$$

C , D , E měl by tento rozklad sčítanců $2^5 = 32$.

(V rozkladu univerza uvádíme v pravé části rovnosti za konstantou 1 v závorce množiny, na které univerzum rozkládáme – 1 (A), ... = 1(A, B), ... = 1(A, B, C), ... = 1 (A, B, C, D, E) apod.)

O rozkladu univerza provedeném formálním způsobem víme, že logický součet všech sčítanců = 1. Pokud je některý ze sčítanců prázdnou třídou, je součet neprázdných sčítanců také roven 1. V praktických příkladech nás právě zajímá, které ze sčítanců tvořících v součtu univerzum, jsou prázdné a které nikoliv.

Ty sčítance, které jsou prázdné, můžeme eliminovat, aniž to změní logický součet.

Příklad. V našem příkladu s učiteli ea) (viz str. 121–125) můžeme provést formální rozklad univerza

$$ABC + AB\bar{C} + A\bar{B}C + A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}BC + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}\bar{B}\bar{C} = 1(A, B, C)$$

Logický součet provádíme se soubory $ABC, \bar{A}\bar{B}\bar{C}, \bar{A}\bar{B}C, \bar{A}B\bar{C}, \bar{A}BC, A\bar{B}\bar{C}, A\bar{B}C, AB\bar{C}$.

Ty jsou neprázdné. Ostatní sčítance neobsahují ani jeden prvek, jsou tedy prázdné.

Rozklad univerza vypadá tedy takto:

$$ABC + \underline{A\bar{B}\bar{C}} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + \underline{\bar{A}B\bar{C}} + \bar{A}BC + \underline{AB\bar{C}} = 1(A, B, C)$$

$$0 \qquad \qquad 0 \qquad \qquad 0 \qquad \qquad 0 \qquad \qquad 0 \qquad \qquad = 0$$

Dle Z 105 $A + 0 = A$, nezmění eliminace prázdných tříd univerzum. (Stále je rovno 1.)

Protože neprázdný sčítanec je průnikem (logickým součinem) a ten může být neprázdný tehdy a jen tehdy, jsou-li neprázdné všechny třídy, které jej tvoří, můžeme usoudit, že každá ze zúčastněných množin má prvky pro neprázdné soubory.

Názorně vyvstane redukované univerzum na obr. 11

Redukované univerzum tvoří šrafovaná plocha

$$e) \quad ABC + \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C = 1(A, B, C)$$

Potom ostatní sčítance

$$f) \quad ABC + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BC = 0$$

Redukované univerzum lze zjednodušit (minimalizovat)

$$ea) \quad ABC + \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C = 1 \qquad \qquad \text{úprava dle Z 96 a 78}$$

$$eb) \quad (ABC + \bar{A}\bar{B}\bar{C}) + (\bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C}) = 1 \qquad \text{dle Z 94}$$

$$ec) \quad \bar{B}\bar{C} \qquad + \qquad \bar{A}\bar{C} \qquad \qquad \text{(obr. 12)}$$

Komentář k obr. 12:

$$\bar{B}\bar{C} = ||||$$

$$\bar{A}\bar{C} = \approx$$

$$\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{C} = \text{neprázdná plocha}$$

Obrázky číslo 11, 12, 13 graficky dokumentují, že redukované univerzum $ABC + \overline{A}BC + \overline{A}\overline{B}C$ znázorňuje množinu rovnou minimalizované množině $\overline{B}C + \overline{A}\overline{C}$.

$$\underbrace{ABC + \overline{A}BC + \overline{A}\overline{B}C}_{\text{Obr. 11}} = \underbrace{\overline{B}C + \overline{A}\overline{C}}_{\text{Obr. 12}} = \underbrace{\overline{C}(\overline{A} + B)}_{\text{Obr. 13}}$$

Komentář k obr. 13:

$$\begin{array}{l} \overline{A} + B = |||| \\ \overline{C} \quad = \approx \\ \overline{C}(\overline{A} + B) \end{array}$$

ed) $\overline{C}(\overline{A} + B)$ (obr. 13) čtverečková plocha.

Stejně tak lze minimalizovat zbývající (prázdné) sčítance, které jsou doplňkem redukovaného univerza.

fa) $ABC + \overline{A}BC + \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}BC + \overline{A}\overline{B}C = 0$ dle Z 93

fb) $AC + \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}\overline{C} = 0$ dle Z 74

fc) $\overline{A}\overline{B}C + AC + \overline{A}\overline{C} = 0$ dle Z 93

fd) $\overline{A}\overline{B}C + C = 0$ dle Z 99

fe) $C + \overline{A}\overline{B}$ (viz bílá plocha obr. 12)

Abychom důkladně pronikli do těchto operací, provedeme zkoušku: Pokud byly naše úvahy a výpočty správné, pak musí platit, že formule ed (redukované minimalizované univerzum) logicky sečteno s prázdnými sčítanci (v minimalizovaném tvaru $C + \overline{A}\overline{B}$) musí dát univerzum.

Tedy

ga) $[\overline{C}(\overline{A} + B)] + (C + \overline{A}\overline{B}) = 1(A, B, C)$ dle Z 81 a Z 78

gb) $(\overline{A}\overline{C} + \overline{B}C + C + \overline{A}\overline{B}) = 1$ dle Z 74

gc) $(C + \overline{A}\overline{C} + \overline{B}C + \overline{A}\overline{B}) = 1$ dle Z 99

gd)	$C + \bar{A} + B + A\bar{B}$	$= 1$	dle Z 74
ge)	$\bar{A} + A\bar{B} + B + C$	$= 1$	dle Z 99
gf)	$\bar{A} + \bar{B} + B + C$	$= 1$	dle Z 107
gg)	$\bar{A} + 1 + C$	$= 1$	dle Z 103
gh)	1	$= 1$	

q

Logické podmínky, konstrukce redukováného univerza z logických podmínek.

Mějme tři třídy (množiny):

A – třída učitelů pedagogických fakult

B – třída vysokoškolských učitelů

C – třída vědecko–pedagogických pracovníků, jichž se týká vysokoškolský zákon.

Mezi těmito třemi třídami platí vztahy inkluze: $A \subseteq B$ a $B \subseteq C$.
Inkluze je tranzitivním vztahem. Platí tedy

$$[(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C)] \Rightarrow (A \subseteq C)$$

Z toho plyne, že cokoli je řečeno o B , týká se i A a cokoli je řečeno o C , týká se i B .

O kterémkoli prvku (učiteli) můžeme říci, že

$$x \in A \Rightarrow x \in B, \quad x \in B \Rightarrow x \in C.$$

A svislé šrafování

B vodorovné šrafování

C šikmé šrafování

Obr. č. 14 tuto skutečnost demonstruje.
(Cokoliv je vypovídáno o vědecko–pedagogických pracovnících, týká se všech vysokoškolských učitelů, cokoli je vypovídáno o vysokoškolských učitelích, týká se všech učitelů pedagogických fakult.

Cokoli je řečeno o učitelích pedagogických fakult, nemusí se týkat všech učitelů VŠ a

cokoli je řečeno o učitelích VŠ, nemusí se týkat všech vědecko–pedagogických pracovníků.

Existují zde tedy tytéž relace, které byly popsány ve výrokovém kalkulu při výkladu funktoru implikace.

Logické rovnosti zapisujeme

$$A = AB$$

$$A \text{ } \text{ } AB, \text{ resp. } A \text{ } \text{ } AB$$

$$B = BC$$

$$B \text{ } \text{ } BC, \text{ resp. } B \text{ } \text{ } BC$$

(Pozn.: Je zvykem zapisovat logické podmínky s operátorem "=", i když nejde o rovnost v matematickém slova smyslu.)

Máme-li stanoveny logické podmínky (v našem případě AB, BC), pak do úplného rozkladu univerza substituujeme za $A|AB$, za $B|BC$.

$$A|AB, B|BC$$

$$ABC + AB\bar{C} + \bar{A}BC + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}\bar{B}\bar{C} = 1(A, B, C)$$

dle Z 95, Z 106

$$ABBC + ABBC\bar{C} + AB\bar{B}C + AB\bar{B}\bar{C} + \bar{A}BCC + \bar{A}B\bar{C}C + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}\bar{B}\bar{C} = 1(A, B, C)$$

$$ABC + 0 + 0 + 0 + \bar{A}BC + 0 + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}\bar{B}\bar{C} = 1(A, B, C)$$

$$ABC + \bar{A}BC + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}\bar{B}\bar{C} = 1(A, B, C)$$

Dosazením logických podmínek a postupným užitím příslušných zákonů jsme eliminovali prázdné třídy a dospěli jsme k redukovanému univerzu.

V praxi našeho příkladu to znamená, že vzhledem k logickým podmínkám

$$A = AB \text{ a } B = BC,$$

jsou možné varianty:

- všechny třídy v činnosti (ABC),
- učitelé PF nečinní a ostatní činní ($\bar{A}BC$)

- činní pouze vědecko-pedagogičtí pracovníci ($\overline{A}\overline{B}C$)
- všichni nečinní ($\overline{A}\overline{B}\overline{C}$).

Příklad.

Charakteristika logických rovností je patrná na následujícím:

A - Plzeňané $\overline{A}$ - ne-Plzeňané

B - Pražané $\overline{B}$ - ne-Pražané

Logické podmínky:

Každý Plzeňan je zároveň ne-Pražan $A = A\overline{B}$

Každý Pražan je zároveň ne-Plzeňan $B = \overline{A}B$

Úplný rozklad univerza pro množiny A,B:

$$AB + A\overline{B} + \overline{A}B + \overline{A}\overline{B} = 1(A, B)$$

Substituce: za A dosadíme $A\overline{B}$, za B dosadíme $\overline{A}B$

$$(A\overline{B})(\overline{A}B) + (A\overline{B})\overline{B} + \overline{A}(\overline{A}B) + \overline{A}\overline{B} = 1(A, B)$$

$$0 + A\overline{B} + \overline{A}B + \overline{A}\overline{B} = 1(A, B)$$

$$0 + (A\overline{B} + \overline{A}\overline{B}) + (\overline{A}B + \overline{A}\overline{B}) = 1(A, B) \text{ dle Z 96 a Z 74 a Z 78.}$$

$\overline{A} + \overline{B} = \overline{A}\overline{B}$ dle Z 93 není pravda, že někdo může být současně Plzeňanem a Pražanem.

Pro zvládnutí této techniky doporučujeme vypracovat obdobný příklad pro tři množiny: A (Plzeňan), B (Pražan), C (Brňan).

Souhrn

Úplný rozklad univerza má 2^n neprázdných tříd, ale jen tehdy, nejsou-li třídy vázány nějakými logickými podmínkami, které můžeme vyjádřit tzv. *logickými rovnostmi*.

Jsou-li některé třídy, pro něž děláme rozklad univerza, vázány logickými podmínkami, má rozklad univerza

$$2^n - m \text{ sčítanců.}$$

(n = počet tříd, m = počet prázdných sčítanců.)

Tím uzavíráme výklad operací s třídami, při nichž provádíme činnosti:

- 1) Známe-li logické podmínky, formalizujeme je a vyjádříme je logickými rovnostmi.
- 2) Pravé strany logických rovností substituujeme do úplného rozkladu univerza.
(Máme-li logickou rovnost pro množinu, není nutno substituci provádět pro doplňky.)

Příklad: Máme-li logickou rovnici $A = AB$, substituujeme AB všude tam, kde je A . Není třeba substituovat za $\overline{A}$ odpovídající $\overline{AB}$.

- 3) Po substituci provedeme užitím příslušných zákonů kalkulu tříd eliminaci prázdných tříd.
- 4) Získáme redukované univerzum.

Vyvození logických podmínek z redukovaného univerza

Lze říci, že jde o zpětný postup, než jaký byl popsán v předchozí části.

Máme dáno (zjistíme v praxi, vypočítáme) redukované univerzum. Z toho plyne, že existují nějaké logické podmínky, které některé sčítance eliminovaly. Tyto podmínky je nutno najít a vyjádřit v nejpřijatelnější formě. (Nemusí to být vždy ta nejstručnější. Sledovat můžeme srozumitelnost v národním jazyce, ekonomické hledisko, technickou realizovatelnost apod.)

Problém si opět budeme modelovat na jednoduchém příkladu se třemi třídami.

Představme si, že sledujeme nějaké zařízení, které má 3 samostatné části A , B , C . Chápat je budeme jako množinu okamžiků, kdy je některá z částí A , B , C v pohybu, doplňky jsou pak klidové stavy.

Pozorováním zjistíme, že se opakují periodicky situace:

$\overline{A}\overline{B}C$	část A v chodu,	B v klidu,	C v chodu,
$\overline{A}B\overline{C}$	část A v chodu,	B v klidu,	C v klidu, □
$\overline{A}BC$	část A v klidu,	B v chodu,	C v chodu,
$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$	část A v klidu,	B v klidu,	C v chodu.

Tyto čtyři kombinace jsou neprázdné sčítance a tvoří redukované univerzum

$$\overline{A}\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC + \overline{A}\overline{B}\overline{C} = 1(A, B, C)$$

Protože známe celkový počet sčítanců (2^3), víme také, které sčítance jsou prázdné:

$$ABC + A\overline{B}\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\overline{B}\overline{C} = 0(A, B, C)$$

Z předchozího výkladu známe logický zákon

$$A + \overline{A} = 1$$

z něj jsme odvodili

$$A = ABC + AB\bar{C} + \bar{A}BC + \bar{A}\bar{B}\bar{C}$$

$$\bar{A} = \bar{A}BC + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}\bar{B}\bar{C}$$

V uvedených rovnostech nahradíme prázdné sčítance konstantou 0:

$$A = 0 + 0 + \bar{A}BC + \bar{A}\bar{B}\bar{C} \quad \text{dle Z 105}$$

$$\bar{A} = \bar{A}BC + 0 + \bar{A}\bar{B}C + 0$$

$$A = \bar{A}BC + \bar{A}\bar{B}\bar{C} \quad \text{každou z těchto rovností budeme}$$

$$\bar{A} = \bar{A}BC + \bar{A}\bar{B}C \quad \text{minimalizovat}$$

$$A = \bar{A}BC + \bar{A}\bar{B}\bar{C} \quad \text{dle Z 94}$$

$$A = \bar{A}\bar{B}$$

$$\bar{A} = \bar{A}BC + \bar{A}\bar{B}C \quad \text{dle Z 94}$$

$$\bar{A} = \bar{A}C$$

Zjistili jsme logické rovnosti, které eliminovaly sčítance $ABC + AB\bar{C} + \bar{A}BC + \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ a vedly k redukovanému univerzu

$$\bar{A}BC + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}\bar{B}\bar{C} = 1(A, B, C)$$

Hledaná řešení jsou

$$A = \bar{A}\bar{B}$$

$$\bar{A} = \bar{A}C$$

Zkoušku provedeme tak, že do úplného rozkladu univerza substituujeme: $A|\bar{A}\bar{B}, \bar{A}|\bar{A}C$

$$\text{ia) } ABC + AB\bar{C} + \bar{A}BC + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}\bar{B}\bar{C} = 1(A, B, C)$$

substitucí $A|A\bar{B}$, $\bar{A}|\bar{A}C$

$$\text{ib)} \quad A\bar{B}BC + A\bar{B}B\bar{C} + A\bar{B}\bar{B}C + A\bar{B}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}CB\bar{C} + \bar{A}C\bar{B}\bar{C} + \bar{A}C\bar{B}C + \bar{A}C\bar{B}C = 1(A, B, C)$$

$$\text{ic)} \quad 0 + 0 + A\bar{B}C + A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}BC + 0 + \bar{A}\bar{B}C + 0 = 1(A, B, C)$$

$$\text{id)} \quad A\bar{B}C + A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}BC + \bar{A}\bar{B}C = 1(A, B, C)$$

(Protože se stále opakují tytéž logické zákony, které využíváme, nebudeme je již nadále uvádět a některé triviální operace budeme slučovat.)

Hledali jsme logické rovnosti pro třídy A a $\bar{A}$. Stejně tak můžeme vyjít od B a $\bar{B}$, resp. C a $\bar{C}$.

Naše redukované univerzum

$$A\bar{B}C + A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}BC + \bar{A}\bar{B}C = 1(A, B, C)$$

$$B = A\bar{B}C$$

$$\bar{B} = A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}BC$$

$$\bar{B} = A\bar{B} + \bar{B}C$$

$$\bar{B} = \bar{B}(A + C)$$

$$C = A\bar{B}C + \bar{A}BC + \bar{A}\bar{B}C$$

$$C = \bar{A}C + \bar{B}C$$

$$C = C(\bar{A} + \bar{B})$$

$$\bar{C} = A\bar{B}\bar{C}$$

Získali jsme tři skupiny logických rovnic:

$$\begin{aligned} 1. \quad & A = A\bar{E} \\ & \bar{A} = \bar{A}C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad & B = \bar{A}BC \\ & \bar{B} = \bar{B}(A + C) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad & C = C(\bar{A} + \bar{B}) \\ & \bar{C} = A\bar{B}\bar{C} \end{aligned}$$

Říkáme jim logické podmínky stejného smyslu. Tyto 3 skupiny jsou si navzájem ekvivalentní, tzn. že použijeme-li pro eliminaci prázdných sčítanců kteroukoli z nich, dospějeme ke stejnému redukovanému univerzu.

To nám umožňuje zvolit z několika ekvivalencí tu, která je z jakýchkoliv důvodů nejnázornější nebo nejvhodnější z praktických důvodů, zvláště při větším počtu tříd.

Poznatky o ekvivalenci logických rovností lze prakticky využít i tenkrát, kdy známe logické podmínky a tedy logické rovnosti a hledáme pro ně ekvivalentní rovnosti pro jiné třídy.

Postupujeme takto:

- 1) Danými logickými rovnostmi eliminujeme prázdné třídy a utvoříme redukované univerzum.
- 2) Z redukovaného univerza odvodíme logické rovnosti pro další třídy. (Ke skupině daných rovností utvoříme další, ekvivalentní skupiny.)

Příklad. Máme zjištěny logické podmínky, které lze vyjádřit rovnicemi.

$$A = A(B + C)$$

$$\bar{A} = \bar{A}BC$$

Naším úkolem je najít logické rovnosti, které eliminují tytéž prázdné sčítance pro C a $\bar{C}$.

$$\text{ja) } ABC + AB\bar{C} + A\bar{B}C + A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}BC + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}\bar{B}\bar{C} = 1(A, B, C) \text{ subst. } A|A(B + C), \bar{A}|\bar{A}BC$$

jb)

$$A(B + C)BC + A(B + C)B\bar{C} + A(B + C)\bar{B}C + A(B + C)\bar{B}\bar{C} + \bar{A}BCBC + \bar{A}BCB\bar{C} + \bar{A}BC\bar{B}C + \bar{A}BC\bar{B}\bar{C}$$

$$\text{jc) } (AB + AC)BC + (AB + AC)B\bar{C} + (AB + AC)\bar{B}C + (AB + AC)\bar{B}\bar{C} + \bar{A}BC + 0 + 0 + 0 = 1$$

$$\text{jd) } ABBC + ACBC + ABB\bar{C} + ACB\bar{C} + AB\bar{B}C + AC\bar{B}C + AB\bar{B}\bar{C} + AC\bar{B}\bar{C} + \bar{A}BC = 1$$

$$\text{je)} \quad ABC + ABC + AB\bar{C} + 0 + 0 + A\bar{B}C + 0 + 0 + \bar{A}BC = 1$$

$$\text{jf)} \quad ABC + AB\bar{C} + A\bar{B}C + \bar{A}BC = 1 \quad \text{redukované univerzum}$$

z něj odvodíme

$$\text{ja)} \quad C = ABC + A\bar{B}C + \bar{A}BC \quad \text{dle Z 96 a Z 78}$$

$$= (ABC + A\bar{B}C) + (ABC + \bar{A}BC) \quad \text{dle Z 93}$$

$$= AC + BC \quad \text{dle Z 82}$$

$$= \underline{C(A + B)}$$

$$\bar{C} = AB\bar{C}$$

Logické rovnice, které eliminují tytéž sčítance a vedou k totožnému rozkladu univerza jsou $C = C(A + B)$

$$\bar{C} = AB\bar{C}.$$

Čtenářům doporučujeme provést zkoušku substitucí do úplného rozkladu univerza pro třídy ABC a eliminaci prázdných tříd.